به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی

پاییز ۱۴۰۲

فضای برداری و زیرفضاها | **تمرین اول** | تاریخ انتشار: ۱۸ مهر ۱۴۰۲

۱. پرسش‌های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. **سیاست ارسال با تاخیر:** شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۱۶ روز تاخیر استفاده کنید. این مقدار برای تمارین تئوری و عملی به‌صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. **سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمارین:** دانشجویان می‌توانند در حل تمارین برای رفع ابهام و یا به‌دست آوردن ایده‌ی کلی با یک‌دیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به‌دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماما توسط خود دانشجو انجام شود. **حتما در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.**

سوالات تئوری (۱۰۰ نمره)

تاریخ تحویل: ۵ آبان ۱۴۰۲

پرسش ۱ (۲۰ نمره) در هر مورد مشخص کنید که مجموعه داده شده یک فضای برداری هست یا خیر، و درستی جواب خود را با اثبات و یا مثال نقض نشان دهید.

(آ) (۵ نمره) مجموعه بردارهای U که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$U = \{(a,b) \in R^{۲} : b = ۳a + ۱\}$$

(ب) (۵ نمره) مجموعه بردارهای $\{(a,b) \in R^{۲}\}$ که ضرب اسکالر آن به صورت $k(a,b) = (ka, b)$ تعریف شده است و جمع آن جمع عادی در اعداد حقیقی است.

(ج) (۵ نمره) مجموعه اعداد حقیقی که جمع آن به صورت $x \bigoplus y = x - y$ تعریف می‌شود و ضرب آن ضرب عادی در مجموعه اعداد حقیقی است.

(د) (۵ نمره) مجموعه $R^{۳}$ که جمع برداری آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(a_{۱}, a_{۲}, a_{۳}) \bigoplus (b_{۱}, b_{۲}, b_{۳}) = (a_{۱} + b_{۱} + ۵, a_{۲} + b_{۲} - ۷, a_{۳} + b_{۳} + ۱)$$

و ضرب اسکالر آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c(a_{۱}, a_{۲}, a_{۳}) = (ca_{۱} + ۵(c-۱), ca_{۲} - ۷(c-۱), ca_{۳} + c - ۱)$$

پاسخ

(آ) (۵ نمره) این مجموعه یک فضای برداری نیست، چراکه تحت عمل ضرب اسکالر و یا جمع بسته نیست.

(ب) (۵ نمره) این مجموعه یک فضای برداری نیست. چون که خاصیت پخشی بر روی ضرب اسکالر ندارد:

$$(r+s)(a,b) = ((r+s)a, b) = (ra + sa, b)$$
$$(r+s)(a,b) = r(a,b) + s(a,b) = (ra + sa, ۲b)$$

(ج) (۵ نمره) این مجموعه یک فضای برداری نیست.چون برای مثال جمع آن خاصیت جابه‌جایی ندارد.

(د) (۵ نمره) این مجموعه یک فضای برداری است چرا که تمام ویژگی‌های آن را دارد. در جمع برداری خاصیت شرکت‌پذیری و جابه‌جایی دارد. بردار ۰ آن برابر $(-۵, ۷, -۱)$ است و هر بردار هم دارای یک بردار منفی است که جمع آن‌ها برابر ۰ شود. در ضرب اسکالر هم خاصیت شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری دارد و بردار ۱ آن برابر $(۱, ۱, ۱)$ است.

پرسش ۲ (۲۰ نمره) با توجه به مفهوم Direct Sum به سوالات زیر پاسخ دهید.

(آ) (۱۰ نمره) با فرض اینکه $U = \{(x,x,y,y) \in \mathbf{R}^{۴} : x, y \in \mathbf{R}\}$ زیرفضای W از $\mathbf{R}^{۴}$ را طوری مشخص کنید که $\mathbf{R}^{۴} = U \bigoplus W$.

(ب) (۱۰ نمره) با فرض اینکه $U = \{(x, y, x+y, x-y, ۲x) \in \mathbf{R}^{۵} : x, y \in \mathbf{R}\}$ زیرفضای W از $\mathbf{R}^{۵}$ را طوری مشخص کنید که $\mathbf{R}^{۵} = U \bigoplus W$.

پاسخ

(آ) (۱۰ نمره) زیرفضای $W = \{(۰, z, ۰, w) \in \mathbf{R}^{۴} : z, w \in \mathbf{R}\}$ را در نظر بگیرید. به ازای هر $(x,y,z,w) \in \mathbf{R}^{۴}$ داریم:

$$(x,y,z,w) = (x,x,z,z) + (۰, y-x, ۰, w-z) \in U + W$$

زیرا $(x,x,z,z) \in U$ و $(۰, y-x, ۰, w-z) \in W$. بنابراین $\mathbf{R}^{۴} = U + W$.

علاوه بر این، اگر $(x,y,z,w) \in U \cap W$، آنگاه از آنجایی که $(x,y,z,w) \in U$ باید $x = y$ و $z = w$ باشد. مشابها اگر $(x,y,z,w) \in W$، داریم $x = ۰$ و $z = ۰$. بنابراین $x = y = ۰$ و $z = w = ۰$ و در نتیجه $(x,y,z,w) = (۰,۰,۰,۰)$. این یعنی $U \cap W = \{۰\}$. پس $\mathbf{R}^{۴} = U \bigoplus W$.

(ب) (۱۰ نمره) از آنجایی که فقط می‌توانیم دو عنصر اول U را به صورت دلخواه انتخاب کنیم، پس W را طوری انتخاب می‌کنیم که دو عنصر اول صفر باشند و بقیه عناصر متغیر باشند.
زیرفضای $W = \{(0,0,z,w,s) \in \mathbf{R}^5 : x, y \in \mathbf{R}\}$ را در نظر بگیرید. به ازای هر $(x,y,z,w,s) \in \mathbf{R}^5$ داریم:

$$(x,y,z,w,s) = (x,y,x+y,x-y,2x) + (0,0,z-x-y,w-x+y,s-2x) \in U + W$$

زیرا $(x,y,x+y,x-y,2x) \in U$ و $(0,0,z-x-y,w-x+y,s-2x) \in W$. بنابراین $\mathbf{R}^5 = U + W$.
علاوه بر این، اگر $(x,y,z,w,s) \in U \cap W$، آنگاه از آنجایی که $(x,,y,z,w,s) \in W$ باید $x = y = 0$ باشد. همچنین از آنجایی که $(x,y,z,w,s) \in U$، داریم $z = x+y, w = x-y, s = 2x$. بنابراین $z = w = s = 0$ و این یعنی $U \cap W = \{0\}$. پس $\mathbf{R}^5 = U \bigoplus W$.

پرسش ۳ (۲۰ نمره)

(آ) (۱۰ نمره) فرض کنید که S مجموعه تمام دنباله‌های بی‌نهایت عضوی از اعداد حقیقی به شکل $(a_1, a_2, ...)$ باشد به طوری که $lim_{n\to\infty}\, a_n = 0$. ثابت کنید که S یک زیرفضا از مجموعه تمام دنباله‌های نامتناهی از اعداد حقیقی است.

(ب) (۱۰ نمره) مجموعه S به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$S = \{f \in V : \int_0^1 f(t)dt = 0\}$$

و V برابر است با مجموعه تمام توابع از بازه $[0,1]$ به $\mathbb{R}$. ثابت کنید که S زیرفضایی از فضای برداری V است.

پاسخ

(آ) (۱۰ نمره) ثابت می‌کنیم که S تمام شرایط زیرفضا بودن را دارد. توجه کنید که دنباله $(a_1, a_2, ...) = (0, 0, ...)$ عضو S است چراکه :

$$lim_{n\to\infty}\, a_n = lim 0 = 0$$

اگر $a = (a_1, a_2, ...)$ و $b = (b_1, b_2, ...)$ عضو S باشند در آن صورت:

$$lim_{n\to\infty}\,(a_n + b_n) = lim_{n\to\infty} a_n + lim_{n\to\infty} b_n = 0 + 0 = 0$$

پس $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, ...)$ هم عضو S است. حال فرض کنید که c عددی حقیقی باشد در آن صورت:

$$lim_{n\to\infty}\, ca_n = c lim_{n\to\infty} a_n = c * 0 = 0$$

پس $(ca_1, ca_2, ...)$ هم عضو S است. پس S یک زیرفضاست.

(ب) (۱۰ نمره) شرایط زیرفضا بودن را به ترتیب بررسی می‌کنیم. تابع ثابت $f(t) = 0$ عضو S است. همچنین اگر توابع f و g عضو S باشند در آن صورت:

$$\int_0^1 (f+g)(t)dt = \int_0^1 (f(t)+g(t))dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_0^1 g(t)dt = 0 + 0 = 0$$

پس f+g هم عضو S است. حال اگر f عضو S و c عددی حقیقی باشد، در آن صورت داریم:

$$\int_0^1 cf(t)dt = c\int_0^1 f(t)dt = c * 0 = 0$$

پس cf هم عضو S است پس S زیرفضاست.

پرسش ۴ (۱۵ نمره) دو ماتریس $n \times n$ مانند $A,\ B$ را در نظر بگیرید. اثبات کنید که اگر AB را بتوان به صورت ضرب چند $Elementary\ Matrix$ نوشت. آنگاه میتوان گفت که A را هم می‌توان به صورت ضرب چند $Elementary\ Matrix$ نوشت.

پاسخ طبق فرض سوال داریم $AB = E_1 E_2 E_3 ... E_k$ و فرض میکنیم ماتریس A با ضرب elementary matrix های $E'_1 E'_2 E'_3 ... E'_l$ به rref خود میرود. حال داریم:

$$AB = E_1 E_2 ... E_k$$
$$E'_1 E'_2 E'_3 ... E'_l AB = E'_1 E'_2 E'_3 ... E'_l E_1 E_2 ... E_k$$
$$rref(A)B = E'_1 E'_2 E'_3 ... E'_l E_1 E_2 ... E_k$$

حال می‌دانیم که هر Elementary Matrix را می‌توان با یک Elementary Matrix دیگر تبدیل به ماتریس I کنیم. فرض میکنیم این ماتریس ها $E''_1 E''_2 E''_3 ... E''_{k+l}$ باشند. داریم:

$$rref(A)BE''_1 E''_2 E''_3 ... E''_{k+l} = E'_1 E'_2 E'_3 ... E'_l E_1 E_2 ... E_k E''_1 E''_2 E''_3 ... E''_{k+l}$$
$$rref(A)BE''_1 E''_2 E''_3 ... E''_{k+l} = I$$
$$\text{if } C = BE''_1 E''_2 E''_3 ... E''_{k+l} \text{ then } rref(A)C = I$$

که یعنی ضرب rref ماتریس A در ماتریسی دیگر برابر I شده است. اگر در رابطه بالا rref(A) دارای سطر صفر باشد(طبق خواص rref میدانیم این سطر پایین ترین سطر ماتریس کاهش یافته است)، آنگاه حاصل ضرب درایه های سطر n ام ماتریس $rref(A)$ در تمام ستون های ماتریس C یعنی تمام درایه های سطر n ام ماتریس $rref(A)C$ برابر صفر میشود که از آنجا که میدانیم حاصل ضرب این دو ماتریس، I است به تناقض میرسیم. در نتیجه rref ماتریس A به صورت I است و سطر صفر ندارد پس A را میتوانیم به صورت ضرب elementary matrix های $E'_1 E'_2 E'_3 ... E'_l$ بنویسیم.

پرسش ۵ (۱۵ نمره) ماتریس A را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$A = \begin{pmatrix} ۶ & ۶ & -۲ \\ -۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

می‌خواهیم ماتریسی مانند B پیدا کنیم. به صورتی که $AB = I$ باشد. این کار را با استفاده از تشکیل دادن *Augmented matrix* و سپس تبدیل آن به *Reduced Echelon Form* انجام دهید.

همچنین در نهایت *Row Operation* هایی که انجام دادید را به صورت *Elementary Matrix* بنویسید.

پاسخ معادله $AB = I$ را داریم. می‌توان Augmented Matrix را به فرم $A\|I$ داشته باشیم و با استفاده از عملیات‌های سطری ماتریس B را بدست آوریم.

$$\text{AugmentedMatrix} : \left(\begin{array}{ccc|ccc} ۶ & ۶ & -۲ & ۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right) \xrightarrow{R_{۱} \leftarrow \frac{۱}{۶} R_{۱}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۱ & -\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۶} & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right) \xrightarrow{R_{۲} \leftarrow R_{۲} + R_{۱}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۱ & -\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۶} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۶} & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_{۳} \leftarrow R_{۳} + R_{۱}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۱ & -\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۶} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۶} & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & -\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۶} & ۰ & ۱ \end{array}\right) \xrightarrow{R_{۳} \leftarrow R_{۳} - ۲R_{۲}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۱ & -\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۶} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۶} & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۶} & -۲ & ۱ \end{array}\right) \xrightarrow{R_{۱} \leftarrow R_{۱} + R_{۳}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۱ & -\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۶} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۶} & -۲ & ۱ \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_{۱} \leftarrow R_{۱} + R_{۳}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & -۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۶} & -۲ & ۱ \end{array}\right) \xrightarrow{R_{۱} \leftarrow R_{۱} - R_{۲}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۶} & -۲ & ۱ \end{array}\right) \xrightarrow{R_{۳} \leftarrow ۳R_{۳}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۲} & -۶ & ۳ \end{array}\right)$$

در نتیجه ماتریس بدست آمده برای B برابر است با

$$B = \begin{pmatrix} ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ \\ -\frac{۱}{۲} & -۶ & ۳ \end{pmatrix}$$

و Elementary Matrix ها برابر هستند با

$$E_{۱} = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۶} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix},\ E_{۲} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix},\ E_{۳} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{pmatrix},\ E_{۴} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۱ \end{pmatrix},\ E_{۵} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$, E_{۶} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}\ E_{۷} = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}\ E_{۸} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{pmatrix}$$

پرسش ۶ (۱۰ نمره) برای دستگاه معادلات زیر جواب مناسب را بدست آورید.

(آ) (۳ نمره)

$$\begin{array}{ccccccc} ۳x_{۱} & + & ۷x_{۲} & - & x_{۳} & = & ۱۱ \\ x_{۱} & + & ۲x_{۲} & - & x_{۳} & = & ۳ \\ ۲x_{۱} & + & ۴x_{۲} & - & ۲x_{۳} & = & ۱۰ \end{array}$$

(ب) (۳ نمره)

$$\begin{array}{ccccccc} ۳x_{۱} & - & ۲x_{۲} & + & x_{۳} & = & -۷ \\ ۲x_{۱} & + & x_{۲} & - & ۴x_{۳} & = & ۰ \\ x_{۱} & + & x_{۲} & - & ۳x_{۳} & = & ۱ \end{array}$$

(ج) (۴ نمره)

$$\begin{array}{ccccccc} ۲x_{۱} & + & ۶x_{۲} & + & ۱۵x_{۳} & = & -۱۲ \\ ۴x_{۱} & + & ۷x_{۲} & - & ۱۳x_{۳} & = & -۱۰ \\ ۳x_{۱} & + & ۶x_{۲} & - & ۱۲x_{۳} & = & -۹ \end{array}$$

پاسخ برای حل هر کدام از سیستم معادلات زیر، ابتدا معادلات را به شکل Augmented Matrix می‌نویسیم و سپس با استفاده از الگوریتم کاهش ردیفی به جواب می‌رسیم.

(آ)

$$\text{Augmented Matrix : }\left(\begin{array}{ccc|c} ۳ & ۷ & -۱ & ۱۱ \\ ۱ & ۲ & -۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ & -۲ & ۱۰ \end{array}\right) \xrightarrow{R_۳ \leftarrow R_۳ - ۲R_۲} \left(\begin{array}{ccc|c} ۳ & ۷ & -۱ & ۱۱ \\ ۱ & ۲ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۴ \end{array}\right)$$

معادله‌ای که در ردیف آخر داریم برابر است با:

$$۰x_۱ + ۰x_۲ + ۰x_۳ = ۴$$

در نتیجه این دستگاه معادلات جوابی ندارد.

(ب)

$$\text{Augmented Matrix : }\left(\begin{array}{ccc|c} ۳ & -۲ & ۱ & -۷ \\ ۲ & ۱ & -۴ & ۰ \\ ۱ & ۱ & -۳ & ۱ \end{array}\right) \xrightarrow{R_۳ \leftarrow R_۳ - \frac{۱}{۲} R_۲} \left(\begin{array}{ccc|c} ۳ & -۲ & ۱ & -۷ \\ ۲ & ۱ & -۴ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & -۱ & ۱ \end{array}\right) \xrightarrow{R_۲ \leftarrow R_۲ - \frac{۲}{۳} R_۱} \left(\begin{array}{ccc|c} ۳ & -۲ & ۱ & -۷ \\ ۰ & \frac{۷}{۳} & -\frac{۱۴}{۳} & \frac{۱۴}{۳} \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & -۱ & ۱ \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_۳ \leftarrow R_۳ - \frac{۳}{۱۴} R_۲} \left(\begin{array}{ccc|c} ۳ & -۲ & ۱ & -۷ \\ ۰ & \frac{۷}{۳} & -\frac{۱۴}{۳} & \frac{۱۴}{۳} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right) \xrightarrow{R_۱ \leftarrow R_۱ - \frac{۶}{۷} R_۲} \left(\begin{array}{ccc|c} ۳ & ۰ & ۵ & -۱۱ \\ ۰ & \frac{۷}{۳} & -\frac{۱۴}{۳} & \frac{۱۴}{۳} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right) \xrightarrow{R_۲ \leftarrow \frac{۳}{۷} R_۲} \left(\begin{array}{ccc|c} ۳ & ۰ & ۵ & -۱۱ \\ ۰ & ۱ & -۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right)$$

با توجه به معادله آخر داریم که $x_۳$ یک متغیر آزاد است و در نتیجه

$$x_۱ = -۱۱ - ۵x_۳, \qquad x_۲ = ۲ + ۲x_۳, \qquad x_۳ = x_۳$$

(ج)

$$\text{Augmented Matrix : }\left(\begin{array}{ccc|c} ۲ & ۶ & ۱۵ & -۱۲ \\ ۴ & ۷ & -۱۳ & -۱۰ \\ ۳ & ۶ & -۱۲ & -۹ \end{array}\right) \xrightarrow{R_۳ \leftarrow \frac{۲}{۳} R_۳} \left(\begin{array}{ccc|c} ۲ & ۶ & ۱۵ & -۱۲ \\ ۴ & ۷ & -۱۳ & -۱۰ \\ ۲ & ۴ & -۸ & -۶ \end{array}\right) \xrightarrow{R_۳ \leftarrow R_۳ - R_۱, R_۲ \leftarrow R_۲ - ۲R_۱} \left(\begin{array}{ccc|c} ۲ & ۶ & ۱۵ & -۱۲ \\ ۰ & -۵ & -۴۳ & ۱۴ \\ ۰ & -۲ & -۲۳ & ۶ \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_۳ \leftarrow R_۳ - \frac{۲}{۵} R_۲} \left(\begin{array}{ccc|c} ۲ & ۶ & ۱۵ & -۱۲ \\ ۰ & -۵ & -۴۳ & ۱۴ \\ ۰ & ۰ & -\frac{۲۹}{۵} & \frac{۲}{۵} \end{array}\right)$$

در نهایت با حل معادله ساده‌شده بالا به جواب‌های زیر میرسیم

$$x_۱ = \frac{۳۳}{۲۹}, \qquad x_۲ = -\frac{۶۴}{۲۹}, -\frac{۲}{۲۹}$$

سوالات عملی (۱۰۰ نمره)

تاریخ تحویل: ۵ آبان ۱۴۰۲

پرسش ۱ (۱۰۰ نمره) در این بخش می‌خواهیم دستگاه معادلات خطی را با کمک الگوریتم کاهش ردیفی حل کنیم. معادله Ax = b به شما داده می شود و از شما جواب معادله بصورت صعودی و همچنین ماتریس وارون A خواسته می شود.
در سطر اول ورودی عدد n که بیانگر ابعادماتریس مربعی A است داده می شود. در n سطر بعدی نیز به ترتیب سطرهای ماتریس [A|b] داده می شود.

$$-۱۰ \leq a_{ij}, x_i, n \leq ۱۰$$

$$a_{ij}, x_i \in \mathbb{Z} \tag{۱}$$

برای خروجی ابتدا جواب های معادله را بصورت اعداد صحیح صعودی و همراه با براکت، خروجی دهید. در n سطر بعد نیز، ماتریس وارون A را با دقت ۲ رقم اعشار خروجی دهید.
اگر معادله داده شده جواب نداشت یا بیش از یک جواب داشت، فقط عبارت

```
no unique solution
```

را خروجی دهید.
همچنین تضمین می شود جواب های معادله در صورت یکتایی صحیح می باشند.
توجه کنید که در این تمرین مجاز به استفاده از توابع numpy.linalg نمی باشید و باید سوال را با روش کاهش ردیفی حل کنید.
ورودی نمونه ۱

```
3
-2 -4 -10 0
9 0 -5 -58
5 -6 -3 -68
```

خروجی نمونه ۱

```
[-7 -1 6]
[[-0.05 0.08 0.03]
 [ 0.   0.09 -0.17]
 [-0.09 -0.05 0.06]]
```

ورودی نمونه ۲

```
3
1 -10 3 105
1 -10 3 105
-1 5 1 -25
```

خروجی نمونه ۲

```
no unique solution
```

پاسخ حدس گلدباخ

(آ) (۱۰ نمره) اثبات کنید که هر عدد فرد بزرگ تر از ۵ را می‌توان به صورت جمع سه عدد اول نوشت.

(ب) (۱۰ نمره) اثبات کنید که هر عدد زوج بزرگ‌تر یا مساوی ۴ را می‌توان به صورت جمع دو عدد اول نوشت.